Unidad 7

Ecuaciones Diferenciales

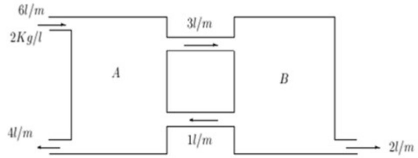
Ejemplos de Aplicación

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

1

Ejemplo 1:

Dos tanques, cada uno con 100 litros de líquido se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 3 l/m y del B al A a razón de 1 l/m. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 2 Kg/l fluye del exterior hacia el tanque A a razón de 6 l/m. La solución (diluida) fluye hacia el exterior del tanque A a razón de 4 l/m y del tanque B a 2 l/m.



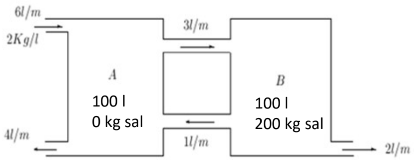
Si inicialmente el tanque A contenía agua pura y el B 200 kg de sal, determinar la cantidad de sal en los tanques durante tres minutos, aplicando el método Euler.

2

La variación de sal en cada tanque estará dada por la diferencia entre la entrada y la salida de líquido en cada tanque:

$$\frac{dA}{dt} = Entrada\ A\ - Salida\ A$$

$$\frac{dB}{dt} = Entrada\ B\ - Salida\ B$$



$$Entrada\ A = 2\,\frac{kg}{l} \times 6\,\frac{l}{m} + \frac{B}{100}\frac{kg}{l} \times 1\,\frac{l}{m} = 12\,\frac{kg}{m} + \frac{B}{100}\frac{kg}{m}$$

$$Salida\ A = \frac{A}{100}\frac{kg}{l} \times 4\,\frac{l}{m} + \frac{A}{100}\frac{kg}{l} \times 3\,\frac{l}{m} = \frac{7A}{100}\frac{kg}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 12 + 0.01B - 0.07A}$$

$A(t)$: concentración (kg) de sal en el tanque A en t minutos

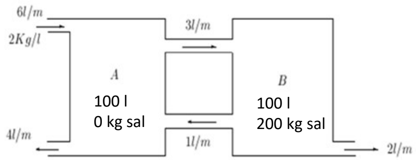
$B(t)$: concentración (kg) de sal en el tanque B en t minutos

3

La variación de sal en cada tanque estará dada por la diferencia entre la entrada y la salida de líquido en cada tanque:

$$\frac{dA}{dt} = Entrada\ A\ - Salida\ A$$

$$\frac{dB}{dt} = Entrada\ B\ - Salida\ B$$



$$Entrada\ B = \frac{A}{100}\frac{kg}{l} \times 3\,\frac{l}{m} = \frac{3A}{100}\frac{kg}{m}$$

$$Salida\ B = \frac{B}{100}\frac{kg}{l} \times 1\,\frac{l}{m} + \frac{B}{100}\frac{kg}{l} \times 2\,\frac{l}{m} = \frac{3B}{100}\frac{kg}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = 0.03A - 0.03B}$$

$A(t)$: concentración (kg) de sal en el tanque A en t minutos

$B(t)$: concentración (kg) de sal en el tanque B en t minutos

4

Entonces queda determinado el siguiente sistema:

$$\frac{dA}{dt} = 12 + 0.01B - 0.07A$$

$$\frac{dB}{dt} = 0.03A - 0.03B$$

Se sabe que inicialmente el tanque A contenía agua pura y el B 200 kg de sal, por lo tanto: $A(0) = 0,\ B(0) = 200$.

Considerar $h = 1$

Euler: $x_{k+1} = x_k + h\ f(t_k, x_k)$

$A_{k+1} = A_k + h\ f(t_k, A_k, B_k)$
$A_1 = 0 + 1$*(**12 + 0.01 B -0.07 A**)
= 12+0.01*200 =**14**
$A_2 = 14 + 1$*(**12 + 0.01 B -0.07 A**)
= 14 + 12 + 0.01*194-0.07*14
= **26.96**
$A_3 = 26.96 + 1$*(**12 + 0.01 B -0.07 A**)
= 26.96 + 12 + 0.01*188.6-0.07*26.96
= **38.953**

$B_{k+1} = B_k + h\ f(t_k, A_k, B_k)$
$B_1 = 200 + 1$*(**0.03 A -0.03 B**)
= 200 -0.03*200 = **194**
$B_2 = 194 + 1$*(**0.03 A -0.03 B**)
= 194 + 0.03*14-0.03*194
= **188.6**
$B_3 = 188.6 + 1$*(**0.03 A -0.03 B**)
= 188.6 + 0.03*26.96-0.03*188.6
= **183.75**

Concentración de sal a los 3 minutos

Ejemplo 2:

Se tiene una barra larga y delgada que tiene una longitud de 10cm. Se sabe que en los extremos de la barra la temperatura es constante todo el tiempo, siendo $T(0,t) = 100°C$ y $T(10,t) = 50°C$; y que en el interior de la barra la temperatura para el tiempo $t = 0$ es $T(x,0) = 0°C$ para $0 < x < 10$. Si el coeficiente de difusividad térmica es $k = 0.835 cm^2/seg$, calcule la distribución de temperatura de la barra hasta el tiempo $t = 0.3seg$, usando $\Delta x = 2cm$ y $\Delta t = 0.1seg$. Use el método explícito.

$$T_t(x,t) = 0.835\ T_{xx}(x,t) \qquad para\ \ 0 \le x \le 10\ \wedge\ 0 \le t \le 0.3$$

con la condición inicial: $\mathrm{T}(x,0) = 0 \quad para\ 0 < x < 10$
y con las condiciones de contorno:

$$\mathrm{T}(0,t) = 100 \quad para\ 0 \le t \le 0.3$$
$$\mathrm{T}(10,t) = 50 \quad para\ 0 \le t \le 0.03$$

Método Explícito:

$$T_{i,j+1} = (1-2r)T_{i,j} + r\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right)$$

donde $r = \frac{0.835\ \times k}{h^2} = \frac{0.835\ \times 0.1}{2^2} = 0.020875$

Entonces:

$$T_{i,j+1} = 0.95825\ T_{i,j} + 0.020875\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right)$$

Considerando $\Delta x = 2cm$ y $\Delta t = 0.1seg$ se obtiene:

$$T_{1,1} = 0.95825\ T_{1,0} + 0.020875\left(T_{2,0} + T_{0,0}\right) = 0.95825 \times 0 + 0.020875 \times (0 + 100) = 2.0875$$

	0	2	4	6	8	10
0	100	0	0	0	0	50
0.1	100	**2.0875**				50
0.2	100					50
0.3	100					50

$$T_{i,j+1} = 0.95825\ T_{i,j} + 0.020875\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right)$$

Por lo tanto:

$$T_{2,1} = 0.95825\ T_{2,0} + 0.020875\left(T_{3,0} + T_{1,0}\right) = 0.95825 \times 0 + 0.020875 \times (0 + 0) = 0$$
$$T_{3,1} = 0.95825\ T_{3,0} + 0.020875\left(T_{4,0} + T_{2,0}\right) = 0.95825 \times 0 + 0.020875 \times (0 + 0) = 0$$
$$T_{4,1} = 0.95825\ T_{4,0} + 0.020875\left(T_{5,0} + T_{3,0}\right) = 0.95825 \times 0 + 0.020875 \times (50 + 0) = 1.04375$$
$$T_{2,2} = 0.95825\ T_{2,1} + 0.020875\left(T_{3,1} + T_{1,1}\right) = 0.95825 \times 2.0875 + 0.020875 \times (100 + 0) = 4.08785$$

Y así sucesivamente:

	0	2	4	6	8	10
0	100	0	0	0	0	50
0.1	100	2.0875	0	0	1.04375	50
0.2	100	4.08785	0.04358	0.02179	2.04392	50
0.3	100	6.00559	0.12755	0.06446	3.00279	50